3.4.15 Rozklad na součin III (vzorce)

Předpoklady: 0304014

Př. 1: Rozlož mnohočleny na součin.

a) $2a^2+2ab+a+b$ b) $2x^2+3y+3x+2xy$

a) $2a^2+2ab+a+b=2a(a+b)+(a+b)=(a+b)(2a+1)$

b) $2x^2+3y+3x+2xy=2x^2+3x+3y+2xy=x(2x+3)+y(3+2x)=(2x+3)(x+y)$

Př. 2: Rozlož na součin mnohočleny:

a) $x^2+2xy+y^2$ b) $y^2+8y+16$ c) a^2-6a+9.

a) $x^2+2xy+y^2$ - máme jen tři členy $\Rightarrow$ těžko se nám podaří z nich vytknutím vytvořit dvě stejné závorky $\Rightarrow$ zkusíme jeden ze členů (nejspíše prostřední, který má koeficient 2) rozdělit na dva: $2xy=xy+xy$.

$x^2+2xy+y^2=x^2+xy+xy+y^2=x(x+y)+y(x+y)=(x+y)(x+y)=(x+y)^2$

Postřeh: $x^2+2xy+y^2=(x+y)^2$ - nejde o nic jiného než vzorec $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ použitý na druhou stranu $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2=(a+b)(a+b)$.

b) $y^2+8y+16=y^2+4y+4y+16=y(y+4)+4(y+4)=(y+4)(y+4)=(y+4)^2$

Můžeme použít i vzorec obráceným směrem: $y^2+8y+16=y^2+2\cdot y\cdot 4+4^2=(y+4)^2$.

c) $a^2-6a+9=a^2-3a-3a+9=a(a-3)-3(a-3)=(a-3)(a-3)=(a-3)^2$

Můžeme použít i vzorec obráceným směrem: $a^2-6a+9=a^2-2a\cdot 3+3^2=(a-3)^2$.

Pedagogická poznámka: Všichni žáci, kteří rozklad v bodě a) našli, postupovali způsoben naznačeným v řešení, teprve po upozornění, si někteří všimli, že výraz už znají ve formě vzorce.

Některé trojčleny můžeme rozložit na součin (druhou mocninu) pomocí vzorců na umocňování dvojčlenů: $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$ $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$.

Pedagogická poznámka: Nejdůležitějším bodem v následujícím příkladu je bod c). Dopředu neupozorňuji na to, že ne každý trojčlen, který se tváří jako vzorec jde opravdu rozložit. Zajímá mě právě jejich chování v situaci, které při řešení tohoto bodu nastane. Nejlepším žákům se situace jasná dopředu, dobří žáci si rozmyslí, o co jde ve chvíli, kdy narazí na problém, další skupina se při řešení zastaví a neví si rady a ti nejslabší trojčlen normálně rozloží (buď s desítkou nebo pětkou) a nevšimnou si ničeho zajímavého. Při kontrole se zmiňuji, co každá z možností vypovídá o jejich přístupu k matematice.

Př. 3: Rozlož mnohočleny na součin.

a) x^2-4x+4 b) $a^2+8a+16$ c) $x^2-20x+25$

d) $4x^2+4x+1$ e) $9x^2+12x+4$ f) $16y^2-24y+9$

g) $4x^2+12xy+9y^2$ h) $a^4-4a^2b+4b^2$ i) $4x^4+12x^2y+9y^2$

a) $x^2-4x+4=x^2-2\cdot x\cdot 2+2^2=(x-2)^2$

b) $a^2+8a+16=a^2+2\cdot a\cdot 4+4^2=(a+4)^2$

c) $x^2-20x+25=x^2-2\cdot x\cdot 10+5^2$ - nejde o vzorec $\Rightarrow$ nemůžeme napsat jako druhou mocninu

d) $4x^2+4x+1=(2x)^2+2\cdot 2x\cdot 1+1^2=(2x+1)^2$

e) $9x^2+12x+4=(3x)^2+2\cdot 3x\cdot 2+2^2=(3x+2)^2$

f) $16y^2-24y+9=(4y)^2-2\cdot 4y\cdot 3+3^2=(4y-3)^2$

g) $4x^2+12xy+9y^2=(2x)^2+2\cdot 2x\cdot 3y+(3y)^2=(2x+3y)^2$

h) $a^4-4a^2b+4b^2=\left(a^2\right)^2-2\cdot a^2\cdot 2b+(2b)^2=\left(a^2-2b\right)^2$

i) $4x^4+12x^2y+9y^2=\left(2x^2\right)^2+2\cdot 2x\cdot 3y+(3y)^2=\left(2x^2+3y\right)^2$

Př. 4: Rozlož mnohočlen na součin.

a) a^2-b^2 b) a^2+b^2

a) a^2-b^2

Hledáme součin dvou závorek, obě musí obsahovat *a* i *b* a zřejmě nic jiného $\Rightarrow$ tři možnosti:

- $(a+b)(a+b)=a^2+2ab+b^2$ (vzorec, již známe),
- $(a-b)(a-b)=a^2-2ab+b^2$ (vzorec, již známe),
- $(a+b)(a-b)=a^2-ab+ab-b^2=a^2-b^2$ (právě to jsme hledali).

b) a^2+b^2

Hledáme součin dvou závorek, obě musí obsahovat *a* i *b* a zřejmě nic jiného, všechny tři možnosti jsme však vyzkoušeli v předchozím bodě $\Rightarrow$ mnohočlen a^2+b^2 zřejmě rozložit nejde.

Pedagogická poznámka: Závěr o nemožnosti rozkladu dvojčlenu a^2+b^2 žáci neudělají, pouze zjistí, že žádný z jejich nápadů není vyhovující.

Rozdíl a^2-b^2 můžeme rozložit takto: $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

Součet a^2+b^2 nelze rozložit na součin.

Dodatek: Důvody, proč součet a^2+b^2 nejde rozložit, si ještě ukážeme v příštím roce.

Př. 5: Rozlož mnohočleny na součin.

a) x^2-9 b) a^2-25 c) $16-y^2$

d) $4x^2-1$ e) $9x^2-4y^2$ f) b^4-81

g) y^2-5 h) $3a^2-1$ i) $4x^4-9$

a) $x^2-9=x^2-3^2=(x+3)(x-3)$

b) $a^2-25=a^2-5^2=(a+5)(a-5)$

c) $16-y^2=4^2-y^2=(4+y)(4-y)$

d) $4x^2-1=(2x)^2-1^2=(2x+1)(2x-1)$

e) $9x^2-4y^2=(3x)^2-(2y)^2=(3x+2y)(3x-2y)$

f) $b^4-81=(b^2)^2-9^2=(b^2-9)(b^2+9)=(b^2-3^2)(b^2+9)=(b+3)(b-3)(b^2+9)$

g) $y^2-5=y^2-(\sqrt{5})^2=(y+\sqrt{5})(y-\sqrt{5})$

h) $3a^2-1=(\sqrt{3}a)^2-1^2=(a\sqrt{3}+1)(a\sqrt{3}-1)$

i) $4x^4-9=(2x^2)^2-3^2=(2x^2+3)(2x^2-3)=(2x^2+3)\left[(x\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2\right]=$
$(2x^2+3)(x\sqrt{2}+\sqrt{3})(x\sqrt{2}-\sqrt{3})$

Př. 6: Vypočti (bez kalkulačky a bez násobení pod sebe).

a) $31\cdot 29$ b) $22\cdot 18$ c) $92\cdot 108$

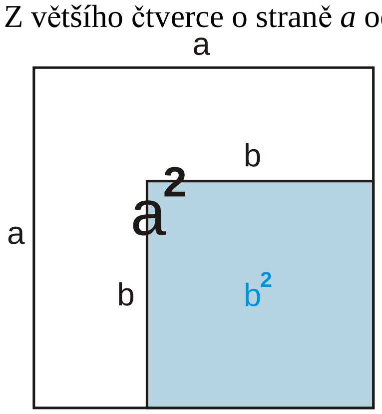
a) $31\cdot 29=(30+1)(30-1)=30^2-1^2=900-1=899$

b) $22\cdot 18=(20+2)(20-2)=20^2-2^2=400-4=396$

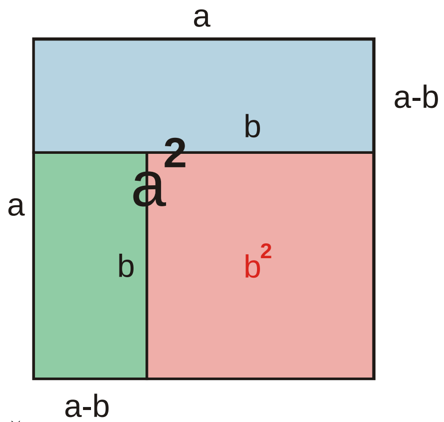
c) $92\cdot 108=(100-8)(100+8)=100^2-8^2=10\,000-64=9936$

Př. 7: Znázorni graficky vzorec $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

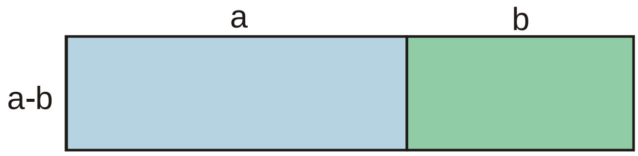
Z většího čtverce o straně *a* odebereme menší čtverec o straně *b*.



Zajímá nás bílá plocha na obrázku (plocha $a^2 - b^2$). Chceme dokázat, že $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \Rightarrow$ potřebujeme dokázat, že bílá plocha odpovídá obdélníku o stranách $(a+b)$ a $(a-b) \Rightarrow$ rozdělíme bílou plochu na dvě částí, označíme si jejich strany.



Části složíme k sobě.



Získali jsme obdélník o stranách $(a+b)$ a $(a-b)$ jehož plocha je $(a+b)(a-b)$. Platí tedy vzorec: $a^b - b^2 = (a+b)(a-b)$.

Shrnutí: Pro rozklad trojčlenů můžeme využívat vzorce $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ a $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$, které jsme v obráceném směru používali už pro umocňování. Pro rozklad dvojčlenu $a^2 - b^2$ můžeme používat vzorec $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$. Dvojčlen $a^2 + b^2$ rozložit nejde.